Να βρεθεί η εξίσωση του κύκλου που είναι περιγεγραμμένος στο $\overset{\Delta}{OAB}$ με κορυφές

$O(0,0,0)$, $A(1,2,3)$, $B(2,-1,0)$

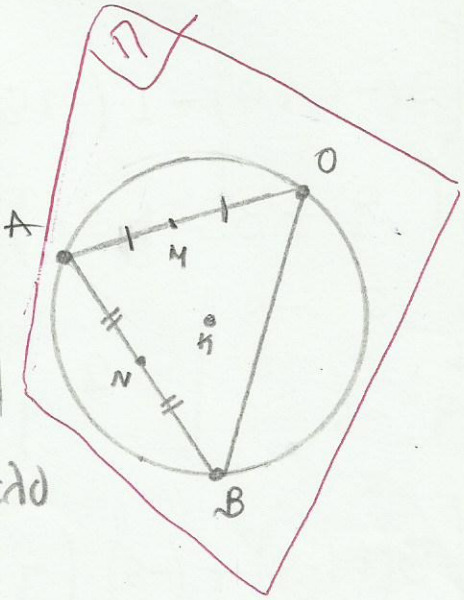
i) Ποιο το κέντρο και η ακτίνα του κύκλου

ii) Να βρεθεί το $E_{\overset{\Delta}{OAB}}$.

<u>ΛΥΣΗ</u>

Το σκεπτικό έχει ως εξής:

- Το M μέσο της AO, $M\left(\frac{1}{2},1,\frac{3}{2}\right)$
- Το N μέσο της AB, $N\left(\frac{3}{2},\frac{1}{2},\frac{3}{2}\right)$




Υπολογίζουμε το επίπεδο (Π) όπου κόβει τη σφαίρα στον ζητούμενο κύκλο και διέρχεται από τα O, A και B.

$$(\Pi): \begin{vmatrix} x-0 & y-0 & z-0 \\ 1-0 & 2-0 & 3-0 \\ 2-0 & 0-1 & 0-0 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \begin{vmatrix} x & y & z \\ 1 & 2 & 3 \\ 2 & -1 & 0 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \boxed{3x+6y-5z=0}$$

Άρα, αρκεί να βρω τη σφαίρα που την κόβει το (Π) και διέρχεται από τα 3 σημεία. Έπειτα, παίρνουμε το επίπεδο $(\Pi_1)$ που τέμνεται κάθετα με το (Π) και διέρχεται από το M

Άρα, το $(\Pi_1) \perp (\Pi)$, $(\Pi_1) \ni M$ και το $\vec{OA} \perp (\Pi_1)$. Επομένως:

$$(\Pi_1): 1\cdot\left(x-\frac{1}{2}\right)+2(y-1)+3\left(z-\frac{3}{2}\right)=0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{x+2y+3z-7=0}$$

Έπειτα, παίρνουμε το επίπεδο $(\Pi_2)$ που τέμνει κάθετα το (Π) και διέρχεται απ' το N. Άρα το $(\Pi_2) \perp (\Pi)$, $(\Pi_2) \ni N$ και $\vec{AB} \perp (\Pi_2)$

$$(\Pi_2): 1\left(x-\frac{3}{2}\right)-3\left(y-\frac{1}{2}\right)-3\left(z-\frac{3}{2}\right)=0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x-3y-3z+\frac{9}{2}=0 \Rightarrow \boxed{2x-6y-6z+9=0}$$

Επομένως το $K(\alpha,\beta,\gamma)=(\Pi_1)\cap(\Pi)\cap(\Pi_2)$ με $\rho=|\vec{OK}|$

Άρα, επιλύουμε το γραμμικό σύστημα και μετά κάνουμε αντικατάσταση

$$\begin{cases} 3x+6y-5z=0 \\ x+2y+3z=7 \\ 2x-6y-6z=-9 \end{cases}$$

$$D=\begin{vmatrix} 3 & 6 & -5 \\ 1 & 2 & 3 \\ 2 & -6 & -6 \end{vmatrix} = 2\cdot\begin{vmatrix} 3 & 3 & -5 \\ 1 & 1 & 3 \\ 2 & -3 & -6 \end{vmatrix} =$$

$$= 2\left[3(-6+9)-1\cdot(-18-15)+2(9+5)\right] =$$

$$= 2(9+33+28) = 140 \neq 0$$

$$D_x=\begin{vmatrix} 0 & 6 & -5 \\ 7 & 2 & 3 \\ -9 & -6 & -6 \end{vmatrix} = 2\cdot\begin{vmatrix} 0 & 3 & -5 \\ 7 & 1 & 3 \\ -9 & -3 & -6 \end{vmatrix} = 2(-3)\cdot\begin{vmatrix} 0 & 3 & -5 \\ 7 & 1 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{vmatrix} =$$

$$= -6\cdot\left[-3(14-9)+(-5)\cdot(7-3)\right] = -6(-15-20) = 210$$

$$D_y=\begin{vmatrix} 3 & 0 & -5 \\ 1 & 7 & 3 \\ 2 & -9 & -6 \end{vmatrix} = 3(-42+27)+(-5)(-9-14) = -45+115 = 70$$

$$D_z=\begin{vmatrix} 3 & 6 & 0 \\ 1 & 2 & 7 \\ 2 & -6 & -9 \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} 3 & 3 & 0 \\ 1 & 1 & 7 \\ 2 & -3 & -9 \end{vmatrix} =$$

$$= 2\left[3(-9+21)-3(-9-14)+0\right] = 2(3\cdot 12+69) = 210$$

Άρα, $x=\frac{D_x}{D}=\frac{210}{140}=\frac{3}{2}$, $y=\frac{D_y}{D}=\frac{70}{140}=\frac{1}{2}$

$z=\frac{D_z}{D}=\frac{210}{140}=\frac{3}{2}$, Άρα $K\left(\frac{3}{2}, \frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right)$

Και $|\vec{KO}| = \sqrt{\left(\frac{3}{2}\right)^2+\left(\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{3}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{18}{4}+\frac{1}{4}} = \sqrt{\frac{19}{4}} = \frac{\sqrt{19}}{2}$

ii) $E_{O\hat{A}B} = \frac{1}{2}|\vec{OA}\times\vec{OB}| = \frac{1}{2}\left\|\begin{matrix} \vec{x_0} & \vec{y_0} & \vec{z_0} \\ 1 & 2 & 3 \\ 2 & -1 & 0 \end{matrix}\right\| = \frac{1}{2}\sqrt{70}$ τ.μ

$\vec{OA}\times\vec{OB} = (3, 6, -5)$